Una breve reflexión acerca de la deducción algebraica, geométrica, aritmética y conceptual de la frontera de posibilidades de producción

Adán Pigeon García*

Resumen

El objetivo de este artículo es hacer una reflexión acerca de la deducción teórica y matemática de la frontera de posibilidades de producción. Esta deducción, a diferencia de manuales diversos de economía, se hace de una manera distinta, más didáctica; de una manera en la que el estudiante de economía pueda seguir *pari passu* su desarrollo. Para lograr todo lo anterior, se trabajará con dos distintas funciones de producción, dos factores productivos y rendimientos decrecientes a escala, además, de que se hará uso de un Software especializado: *Wolfram Mathematica 10.4*.

Palabras Clave: Comercio internacional, Frontera de posibilidades de producción, Funciones de producción, dotación factorial.

Clasificación JEL: B21, B22, F11, F41.

Abstract

The objective of this article is to make a reflection about the theoretical and mathematical deduction of the production possibilities frontier. This deduction, unlike various manuals of economics, is done in a different way, more didactic; in a way in which the student of economy can continue *pari passu* its development. To achieve all of the above, we will work with two different production functions, two productive factors and decreasing returns to scale, in addition, we will use a specialized software: *Wolfram Mathematica 10.4*.

Key Words: International trade, production possibility curve, production functions, dotation factorials.

JEL Classification: B21, B22, F11, F41.

* Profesor y estudiante de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco y Xochimilco (adan_pigeon@yahoo.com.mx y 5535-682394). Este trabajo es una fracción del proyecto de investigación para obtener el grado de Doctor en Ciencias Económicas por parte de la universidad ya citada. El autor agradece las observaciones de Fernando Noriega Ureña y José Leonel Larios Ferrer, así como las de los dictaminadores anónimos; sin embargo, la responsabilidad de los yerros u omisiones son exclusivamente de él.

1. Introducción

Ni Paul Samuelson en *International Factor-Price Equalisation* o *Protection and Real Wages* o en *Factor Proportions*; ni Ronald Jones en *The Structure of Simple General* o en *Heckscher-Ohlin Trade Flows*, hacen la deducción matemática de la *Haberler-Virner-Lerner-Leontief product transformation curve* que aparece en sus artículos.

Tampoco Robert C. Feenstra en *Advanced International Trade* muestra la deducción de dicha frontera, ya que él la representa de manera general y supone que la primera y segunda derivada del nivel de producto 2 con respecto al de producto 1 es negativa, esto para garantizar concavidad[1]. De manera similar, la generalidad de los libros y artículos de economía muestran su deducción a partir de la Caja de Francis Ysidro Edgeworth[2].

Es por lo anterior que aquí se hace un ensayo, a partir de dos funciones de producción explícitas, de la formalización algebraica, geométrica y aritmética de la curva de transformación. Con ello se busca mostrar su explicación de manera distinta de los manuales de economía, de manera más didáctica[3]; esto es necesario si se considera que de su correcta comprensión, se podrá analizar con mayor facilidad a los Teoremas que han sustentado a la teoría del comercio Internacional[4]. Posteriormente justificaremos la razón por la que definimos a dicha frontera como *una relación de puntos con pendiente negativa decreciente que resulta de la interacción de los puntos técnicamente eficientes de dos distintas funciones de producción y de una cantidad de eficiente de factores. A la relación factorial que se da entre dos sectores dentro de una misma economía, le corresponderá necesariamente una única curva de transformación. Tan pronto como cambie la relación factorial que se da entre los dos sectores de una misma economía, cambiará también la Haberler-Virner-Lerner-Leontief product transformation*.

---

[1] Robert C. Feenstra en *Advanced International* dice: *Maximizing the amount of good 2, $y_2 = f_2 (L_2, K_2)$, subject to a given amount of good 1, $y_1 = f_1 (L_1, K_1)$… give us $y_2 = h (y_1, L, K)$…As drawn, y_2 is a concave function of y_1, $\partial^2 h (y_1, L, K) / (\partial y_1^2 < 0$.*

[2] El adjetivo "generalidad" es utilizado para clasificar dentro de un todo, dentro de una población, a los individuos y elementos que tienen rasgos particulares, específicos o definidos, esta generalidad no se verá afectada por pequeños elementos o individuos que no pudiesen tener tales rasgos o particularidades. Por ejemplo, en el caso de la divulgación de la teoría económica, podemos encontrar textos cuya prosa analítica se encuentra acompañada por brillantes demostraciones, en el caso de la teoría microeconómica: *Microeconomic theory* de Andrew Mas-Colell, Michael D. Whinston y Jerry R.Green, y en el caso del comercio internacional: *Theory of international trade: a dual general equilibrium approach* o *International trade theory and policy* de Avinash Dixit y Giancarlo Gandolfo, respectivamente. Sin embargo, la demostración que aquí se hará, dista notablemente de las que son hechas en los libros que representan los casos particulares.

[3] La demostración de la concavidad de la frontera de posibilidades de producción es visible en distintos textos de avanzados de Microeconomía o de Comercio internacional. Véase, por ejemplo, la página: http://www.hetwebsite.net/het/essays/paretian/paretoptimal.htm. Sin embargo, la deducción que aquí se hace es distinta, es más didáctica.

[4] Véase, por ejemplo, Teorema Stolper-Samuelson y Heckscher-Ohlin-Samuelson.

[5] La teoría del equilibrio general considera a la tecnología como equivalente a la ingeniería, es decir, a las máquinas, herramientas, computadoras y la infraestructura, así como el mobiliario que el factor trabajo requiere para realizar la producción de bienes. Si tomamos dicha consideración, pero además añadimos la que nos indica que el precio del trabajo en términos reales sólo podrá incrementarse si se incrementa la cantidad de producto de cada trabajador añade a la firma, sería natural pensar que mientras más y mejores herramientas se tengan en alguna región, se incrementará el bienestar de la población.

[6] Si una función de producción es no separable, homogénea de grado igual a la unidad y tiene rendimientos marginales decrecientes, se verificará la condición de Ken Ichi Inada.

2. Deducción algebraica

Se trata de una economía en la cual hay dos sectores: sector 1 y sector 2; cada sector realiza su nivel de producto a través del uso de dos factores productivos: tierra y trabajo. La representación formal de la tecnología es a través de dos funciones de producción[5], en la que se verifica su no separabilidad factorial, homogeneidad de grado inferior a la unidad y rendimientos marginales decrecientes a factor[6].

$$q_{1o} = L_1^{\alpha_1} T_1^{\alpha_2} \qquad (1) \qquad\qquad q_{2o} = L_2^{\beta_1} T_2^{\beta_2} \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \in (0,1) \qquad \alpha_i \in (0,1) \qquad \sum_{i=1}^{2} \beta_i \in (0,1) \qquad \beta_i \in (0,1)$$

A través de una pequeña manipulación algebraica, la ecuación (1) y (2) se pueden reescribir:

$$L_1 = \frac{q_{1o}^{\frac{1}{\alpha_1}}}{T_1^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \qquad\qquad q_{2o} = \frac{L_2^{\beta_1}}{T_2^{-\beta_2}}$$

Por otro lado, suponemos que de la suma de los factores técnicamente eficientes de cada sector va a resultar el total del mismo factor, es decir[7]:

$$T_1 + T_2 = \bar{T} \qquad (3) \qquad\qquad L_1 + L_2 = \bar{L} \qquad (4)$$

Y dado que T_1 y T_2 son una fracción φ y $(1-\varphi)$, $\varphi \in (0,1)$, de $\bar{T}$, respectivamente; tendremos:

$$L_1 = \frac{q_{1o}^{\frac{1}{\alpha_1}}}{(\varphi\bar{T})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \qquad (5) \qquad\qquad q_{2o} = \frac{(\bar{L} - L_1)^{\beta_1}}{[(1-\varphi)\bar{T}]^{-\beta_2}} \qquad (6)$$

Si sustituimos la ecuación (5) en (6), vamos a tener la frontera de posibilidades de producción o curva de transformación:

$$q_{2o} = \frac{\left[\bar{L} - \dfrac{q_{1o}^{\frac{1}{\alpha_1}}}{(\varphi\bar{T})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}\right]^{\beta_1}}{[(1-\varphi)\bar{T}]^{-\beta_2}} \qquad (7)$$

Sin embargo, para demostrar que en la ecuación (7) es una deducción correcta de la curva de transformación, debemos verificar que hay una relación negativa decreciente entre la cantidad de producto generado por el sector 2 y la cantidad de producto generado por sector 1, debemos hacer evidente que tanto la primera como la segunda derivada del bien 2 con respecto al 1 son negativas[8].

La razón por las que debemos hacer evidente que ambas derivadas son negativas es porqué a través de ellas es posible mostrar la concavidad de la curva que resulta de la ecuación que aquí se ha deducido; esta interpretación es posible por el siguiente Teorema:

TEOREMA ACERCA DEL COMPORTAMIENTO GRÁFICO DE UNA ECUACIÓN

a. Si $(dq_{2o} / dq_{1o}) < 0$ para todo q_{1o} en algún intervalo, entonces q_{2o} es función negativa de q_{1o} sobre el mismo intervalo.

b. Si $(dq_{2o} / dq_{1o}) < 0$ para todo q_{1o} en algún intervalo, entonces q_{2o} es función positiva de q_{1o} sobre el mismo intervalo.

Considerando el **TEOREMA,** tendremos que demostrar a partir de la ecuación número (7) que:

La cantidad de producto ofrecido por el sector 2 es estrictamente positiva cuando hay nula cantidad de producto ofrecido por el sector 1, lo cual implica que la primera derivada será cero cuando el nivel de producto 1 es nulo.

La cantidad de producto 2 cae cuando se incrementa la generación de producto 1, lo que obliga a demostrar que el signo de la primera derivada es negativo para todo valor positivo de la cantidad ofrecida por el sector 1.

La cantidad de producto 2 cae de manera más pronunciada cuando se sigue incrementando la generación de producto 1, lo cual nos obliga a demostrar que el signo de la segunda derivada es también negativo para todo valor positivo de la cantidad ofrecida por el sector 1.

La demostración de los tres incisos anteriores, los cuales tienen su justificación a partir del **TEOREMA ACERCA DEL COMPORTAMIENTO GRÁFICO DE UNA ECUACIÓN**, es fundamental, ya que es a partir de esos incisos que se demostraría que el gráfico que resulta de la ecuación (7) tiene una forma cóncava[9], por lo que las próximas líneas están destinadas a mostrar el signo de la primera y segunda derivada.

2.1 Primera derivada

Con el fin de facilitar la derivada, aplicamos logaritmo natural a la ecuación (7) para posteriormente hacer lo primero utilizando la regla de la cadena, lo que nos queda:

$$\ln q_{2o} = \beta_1 \ln\left[\bar{L} - \frac{q_{1o}^{\frac{1}{\alpha_1}}}{(\varphi\bar{T})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}\right] + \beta_2 \ln(1-\varphi)\bar{T}$$

$$\frac{d\ln q_{2o}}{dq_{2o}}\frac{dq_{2o}}{dq_{1o}} = \beta_1\left[\frac{-\dfrac{1}{(\varphi\bar{T})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}\dfrac{1}{\alpha_1}q_{1o}^{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}}}{\bar{L} - \dfrac{q_{1o}^{\frac{1}{\alpha_1}}}{(\varphi\bar{T})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}}\right]$$

$$\frac{dq_{2o}}{dq_{1o}} = -\beta_1\left[\frac{\dfrac{1}{(\varphi\bar{T})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}\dfrac{1}{\alpha_1}q_{1o}^{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}}}{\bar{L} - \dfrac{q_{1o}^{\frac{1}{\alpha_1}}}{(\varphi\bar{T})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}}\right]\frac{\left[\bar{L} - \dfrac{q_{1o}^{\frac{1}{\alpha_1}}}{(\varphi\bar{T})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}\right]^{\beta_1}}{[(1-\varphi)\bar{T}]^{-\beta_2}}$$

Reacomodando términos:

$$\frac{dq_{2o}}{dq_{1o}} = \frac{-\beta_1}{\alpha_1}\frac{1}{(\varphi\bar{T})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}[(1-\varphi)\bar{T}]^{\beta_2}\left[\bar{L} - \frac{q_{1o}^{\frac{1}{\alpha_1}}}{(\varphi\bar{T})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}\right]^{\beta_1-1} q_{1o}^{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}} \tag{8}$$

$$\forall q_{1o} > 0$$

[7] Andres Carvajal, en *Introducción a la teoría microeconómica* dice: *Una asignación de factores ($(K_1, L_1),(K_2, L_2)$) tal que $K_1 + K_2 = \bar{K}$ y $L_1 + L_2 = \bar{L}$ es técnicamente eficiente si es imposible encontrar alguna otra asignación $((\hat{K}_1, \hat{L}_1),(\hat{K}_2, \hat{L}_2))$ tal que $\hat{K}_1 + \hat{K}_3 = \bar{K}$ y $\hat{L}_1 + \hat{L}_2 = \bar{L}$ y en la cual la producción de una de las firmas aumente sin que la otra disminuya.*

[8] De aquí en adelante utilizaremos primera y segunda derivada para referiremos a la primera y segunda derivada del nivel de producto 2 con respecto al nivel de producto 1.

[9] Diremos que una curva es cóncava si es posible trazar un segmento rectilíneo capaz de unir dos puntos debajo de dicha curva.

Con (8) se demuestra que si hay un nivel positivo del nivel de producto 1, el primer signo de la derivada será negativo, lo cual demuestra la relación negativa que existe entre los dos bienes; si el nivel de producto ofrecido por el sector es 1 igual a cero, la derivada será nula, lo cual también demostrará que el nivel de producto 2 es máximo cuando el nivel de producto 1 es cero:

$$\left({dq_{2o}}/{dq_{1o}}\right) < 0 \qquad \forall q_{1o} > 0$$

$$\left({dq_{2o}}/{dq_{1o}}\right) = 0 \qquad \forall q_{1o} = 0$$

Antes de continuar, es necesario recordar que esta primera derivada nos muestra la Relación Marginal de Transformación, la cual es la pendiente de la curva de transformación y nos indica la cantidad de producto generado en el sector 2 al que se tiene que renunciar para obtener una unidad adicional del bien que genera el sector 1, es un costo técnico de oportunidad.

2.2 Segunda derivada

Con el fin de facilitar la siguiente derivada aplicamos logaritmo natural a la ecuación (8) y aplicamos la regla de la cadena, lo que nos queda:

$$\ln(dq_{2o}/dq_{1o}) = \ln\frac{-\beta_1}{\alpha_1} + \ln\frac{[(1-\varphi)\bar{T}]^{\beta_2}}{(\varphi\bar{T})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} + (\beta_1 - 1)\ln\left[\bar{L} - \frac{q_{1o}^{\frac{1}{\alpha_1}}}{(\varphi\bar{T})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}\right] + \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\ln q_{1o}$$

$$\frac{d\ln(dq_{2o}/dq_{1o})}{d(dq_{2o}/dq_{1o})}\frac{d(dq_{2o}/dq_{1o})}{dq_{1o}} = (\beta_1 - 1)\frac{\dfrac{-1}{(\varphi\bar{T})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}\dfrac{1}{\alpha_1}q_{1o}^{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}}}{\left[\bar{L} - \dfrac{q_{1o}^{\frac{1}{\alpha_1}}}{(\varphi\bar{T})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}\right]} + \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\frac{1}{q_{1o}}$$

$$\frac{d(dq_{2o}/dq_{1o})}{dq_{1o}} = \left\{\frac{(1-\beta_1)}{\alpha_1}\frac{1}{(\varphi\bar{T})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}\frac{q_{1o}^{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}}}{\left[\bar{L} - \dfrac{q_{1o}^{\frac{1}{\alpha_1}}}{(\varphi\bar{T})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}\right]} + \frac{1}{q_{1o}}\left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\right)\right\}\left(\frac{dq_{2o}}{dq_{1o}}\right) \tag{10}$$

Con (10) se hace explicito que el signo de la segunda derivada es negativo para todo valor positivo de la cantidad ofrecida por el sector 1, con lo cual se comprueba la concavidad de la ecuación que representa a la *Haberler-Virner-Lerner-Leontief product transformation curve*[10]:

$$\frac{d(dq_{2o}/dq_{1o})}{dq_{1o}} < 0 \tag{11}$$

$$\forall q_{1o} > 0$$

3. Deducción geométrica

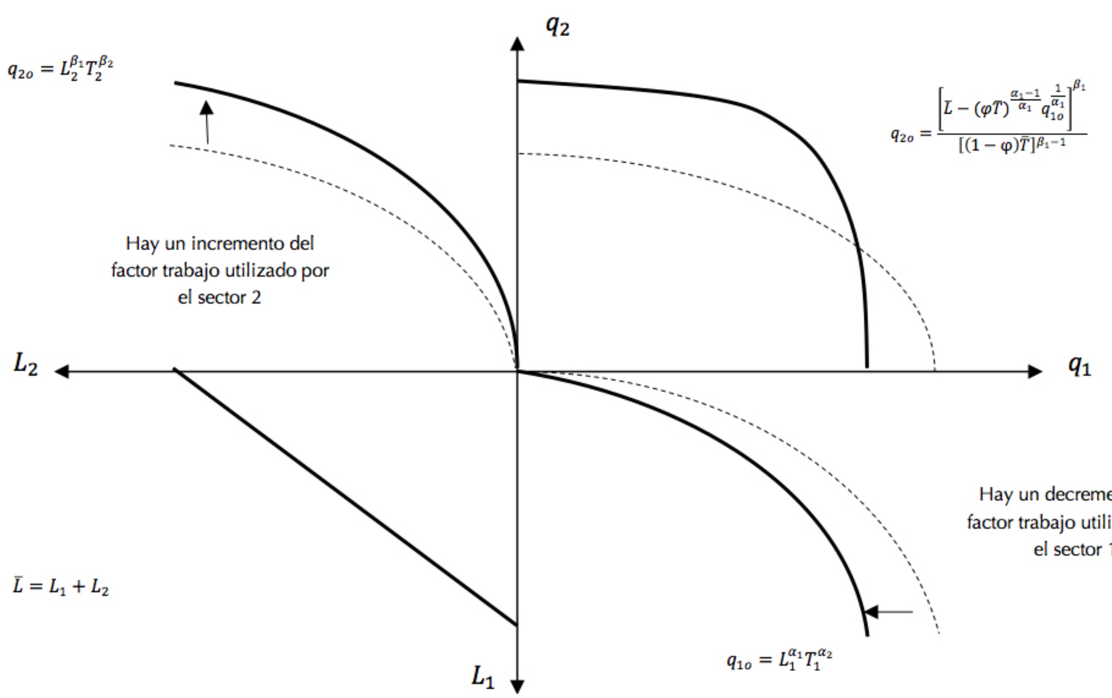
Dos de los supuestos que se encuentran presentes en los artículos de Stolper, Samuelson, Ohlin y Hecksher son los que hacen referencia a la escasez relativa de los factores productivos entre regiones, ellos suponen que en una economía mundo dividida en dos, Europa y América, América tiene una abundancia relativa del factor tierra y Europa, del factor trabajo. También suponen que en cada región se producen dos bienes a través del uso del factor tierra y trabajo: ropa y comida, la primera es intensiva en el factor trabajo y la segunda, en el factor tierra:

Two regions, say Europe and America, each endowed with different proportions of two perfectly immobile factors of production, say land a labor. For convenience, we may assume but two commodities, say food and clothing, each commodity obeying common technological production functions in two regions. We may suppose that each production function shows constant return to scale (Samuelson, 1948:164).

Los supuestos anteriores, escribe Eli Heckscher, son *conditio sine qua non* para que se lleve a cabo el comercio internacional: *A difference in the relative scarcity of the factors of production between one country and another is thus a necessary condition for a difference in comparative costs and consequently for international trade*[11].

Teniendo lo anterior, podemos justificar el siguiente gráfico, que está compuesto por cuatro cuadrantes positivos articulados por su propio origen. En él estamos suponiendo que las líneas con pendiente positiva decreciente y de trazo punteado y son las funciones de producción de América y las líneas de trazo lleno, las de Europa; el hecho de que no sean las mismas se debe a que el sector 1 es intensivo en tierra y el sector 2, en trabajo y además porque América tiene una relación tierra-trabajo estrictamente mayor a la relación que tiene Europa, es por ello que la curva de transformación de la primera región se encuentra sesgada a la producción del bien 1 y la de la segunda región, a la producción del bien 2; es decir, América se especializa en la producción de comida y Europa, en la producción de ropa[12].

Entonces, a la relación tierra-trabajo entre dos sectores dentro de una misma economía le corresponderá necesariamente una única curva de transformación. Tan pronto como cambie la relación factorial entre los dos sectores de una misma economía, cambiará también la curva de transformación[13].



4. Deducción aritmética

Hasta este punto hemos hecho la deducción algebraica y geométrica de la curva de transformación, sin embargo, nos falta hacer su deducción aritmética. Sería complicado y engorroso el hacerla a través de una tabulación de distintos puntos, esto incluso con Excel, por lo que vamos a hacer uso de una de las herramientas tecnológicas que se nos ofrece hoy día: *Wolfram Mathematica 10.4*[14].

Para hacer dicha demostración debemos partir de la ecuación (7), la cual es la deducción algebraica de la curva de transformación.

$$q_{2o} = \frac{\left[\bar{L} - \dfrac{q_{1o}^{\frac{1}{\alpha_1}}}{(\varphi \bar{T})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}\right]^{\beta_1}}{[(1-\varphi)\bar{T}]^{-\beta_2}} \tag{7}$$

Pero, si sabemos que $\varphi \bar{T} = T_1$ y $(1-\varphi)\bar{T} = T_2$, $\varphi \in (0,1)$, tendremos que la ecuación anterior puede reescribirse:

$$q_{2o} = \frac{\left[\bar{L} - \dfrac{q_{1o}^{\frac{1}{\alpha_1}}}{T_1^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}\right]^{\beta_1}}{T_2^{-\beta_2}} \tag{7'}$$

Ahora vamos a suponer los siguientes valores, lo cuales vamos a sustituir en la ecuación que hace referencia a la frontera de posibilidades de producción, por lo que tendremos:

$$\begin{array}{lll} \bar{L} = 4 & T_2 = 4 & T_1 = 2 \\ q_{1o} = X & \alpha_1 = 0.3 & \beta_1 = 0.8 \\ q_{2o} = Y & \beta_2 = 0.1 & \alpha_2 = 0.2 \end{array}$$

10 Es necesario hacer explícito que también la primera y segunda derivada serán negativas con rendimientos constantes a escala, el hecho de que no hayamos trabajado con ellos se debe a que es necesario que garanticemos beneficios positivos para las empresas. Por otro lado, también es posible deducir una curva de eficiencia subjetiva de manera similar a la de transformación, pero esto sería limitado, ya que dicha deducción exigiría que la sumatoria de la elasticidad de cada uno de los bienes sea mayor a cero y menor o igual a la unidad, pero bajo ningún motivo mayor. Es decir, esta restricción ocasionaría que la de la curva de eficiencia subjetiva sea un caso particular, dado que no se podría decir que la sumatoria de la elasticidad de cada uno de los bienes pertenece al conjunto de los números reales positivos.

11 Las letras en cursivas son visibles en *The Effect of Foreign Trade on the Distribution of Income*.

12 Una manera dual de ver el gráfico es suponer la cantidad de tierra que cada sector utiliza como un dato, por lo que lo único que podría variar es la cantidad que cada sector utiliza del factor trabajo. Esto significa que el sector 1 incrementará su factor trabajo si el sector 2 disminuye su mismo factor y viceversa.

13 En el apéndice de *International Trade Theory and Evidence* aparece el grafico que está presente en la actual página, sin embargo, dicho gráfico no es resultado de alguna ecuación que pueda reflejar su comportamiento.

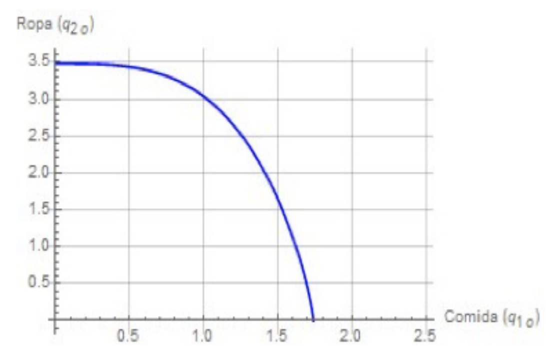
14 La primera versión de *Wolfram Mathematica* fue en 1988 y es un poderoso programa que computa y visualiza de manera numérica, simbólica y gráfica cualquier descripción que contenga elementos matemáticos, geográficos o incluso biológicos. Dicho programa es tan poderoso y sencillo, que sería posible, con conocimiento teórico previo, ser un auxiliar en la comprensión de conceptos y temas que pudiesen resultar ambiguos para estudiantes e incluso profesores de distintas ciencias o disciplinas.

$$Y = \frac{\frac{\left(4 - \frac{X^{\frac{1}{0.3}}}{0.2}\right)^{0.8}}{2^{0.3}}}{4^{-0.1}} \qquad (7')$$

Si utilizamos el programa de Wolfram, obtendremos que de la ecuación que hace referencia a la curva de transformación surge una curva con pendiente negativa decreciente, curva que muestra la relación que hay entre los dos distintos niveles de producción[15]:

$$\text{Plot}\left[Y = \frac{\left(4 - \frac{\frac{X^{\frac{1}{0.3}}}{0.2}}{2^{0.3}}\right)^{0.8}}{4^{-0.1}}, \{X, 0, 2.5\}, \text{AxesLabel} \to \{\text{"Comida ("q"}_1\text{""o"")", "Ropa ("q"}_2\text{""o"")"}\}, \text{PlotStyle} \to \{\text{Blue}\},\right.$$

$$\left.\text{PlotLegends} \to \{\text{"Frontera de posibilidades de producción inicial"}\}, \text{GridLines} \to \text{Automatic}\right]$$



- Frontera de posibilidades de producción inicial

Como puede verse en el gráfico anterior, la producción se encuentra más sesgada hacia el eje que nos indica "ropa". Ahora vamos a suponer que hay un decremento del factor trabajo utilizado por el sector 2 y un incremento del mismo factor utilizado por el sector 1, todo lo anterior es manteniendo lo demás constante. Es decir:

$$\bar{L} = 4 \qquad T_2 = 1 \qquad T_1 = 5$$

$$q_{1o} = X \qquad \alpha_1 = 0.3 \qquad \beta_1 = 0.8$$

$$q_{2o} = Y \qquad \beta_2 = 0.1 \qquad \alpha_2 = 0.2$$

Quedando la ecuación que hace referencia a la frontera de posibilidades de producción, como:

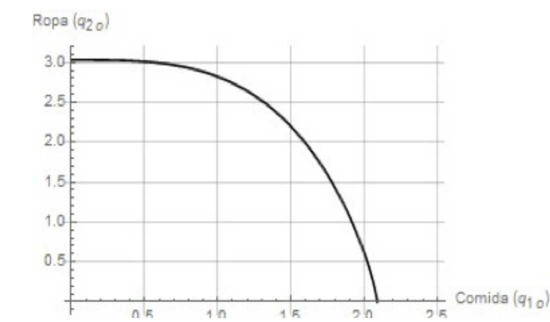
$$Y = \frac{\left(4 - \frac{\frac{X^{\frac{1}{0.3}}}{0.2}}{5^{0.3}}\right)^{0.8}}{1^{-0.1}} \qquad (7'')$$

[15] El lector puede notar que se han colocado de manera intencional la instrucción para elaborar los distintos gráficos dentro del programa *Wolfram Mathematica*.

Nuevamente, utilizando el programa de *Mathematica* obtenemos una segunda curva de transformación, en la cual se muestra que está más sesgada hacia la producción del bien 1, a diferencia de la anterior, la cual está más sesgada hacia la producción del bien 2:

$$\text{Plot}\left[Y = \frac{\left(4 - \frac{\frac{X^{\frac{1}{0.3}}}{0.2}}{5^{0.3}}\right)^{0.8}}{1^{-0.1}}, \{X, 0, 2.5\}, \text{AxesLabel} \to \{\text{"Comida ("q"}_1\text{""o"")", "Ropa ("q"}_2\text{""o"")"}\}, \text{PlotStyle} \to \{\text{Black}\},\right.$$

$$\left.\text{PlotLegends} \to \{\text{"Frontera de posibilidades de producción final"}\}, \text{GridLines} \to \text{Automatic}\right]$$



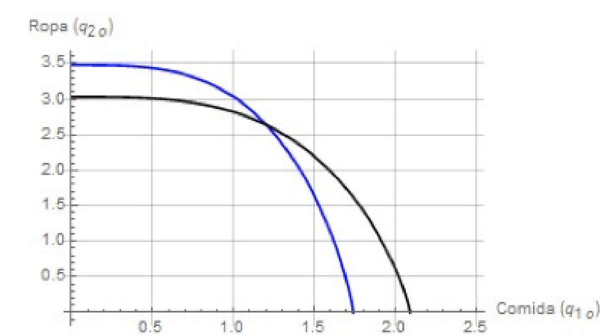
- Frontera de posibilidades de producción inicial

Y si unimos ambos gráficos, obtendremos:

$$\text{Plot}\left[\left\{Y = \frac{\frac{\left(4 - \frac{X^{\frac{1}{0.3}}}{0.2}\right)^{0.8}}{2^{0.3}}}{4^{-0.1}}, Y = \frac{\left(4 - \frac{\frac{X^{\frac{1}{0.3}}}{0.2}}{5^{0.3}}\right)^{0.8}}{1^{-0.1}}\right\}, \{X, 0, 2.5\}, \text{AxesLabel} \to \{\text{"Comida ("q"}_1\text{""o"")", "Ropa ("q"}_2\text{""o"")"}\}, \text{PlotStyle} \to\right.$$

$$\{\text{Blue, Black}\}, \text{PlotLegends} \to \{\text{"Frontera de posibilidades de producción inicial",}$$

$$\left.\text{"Frontera de posibilidades de producción final"}\}, \text{GridLines} \to \text{Automatic}\right]$$



- Frontera de posibilidades de producción inicial
- Frontera de posibilidades de producción final

Se acaba de demostrar a través del uso de *Wolfram Mathematica,* que el comportamiento de la ecuación (7) es perfectamente coherente con lo que estipula la teoría economía acerca de la especialización de cada sector de cada una de las regiones en que está compuesta la economía mundo. Si cambia la dotación factorial de cada región, cambiará también la curva de transformación.

5. Deducción conceptual-Conclusión

Como resultado de la investigación de la deducción algebraica, geométrica y aritmética de la frontera de posibilidades de producción y considerando la ausencia de dicha deducción por parte de los economistas que la utilizan para el análisis del comercio internacional, aquí se propone la siguiente definición acerca de la misma:

La curva de transformación se define como una relación de puntos con pendiente negativa decreciente que resulta de la interacción de los puntos técnicamente eficientes de dos distintas funciones de producción y de una cantidad eficiente de factores. A la relación factorial que se da entre dos sectores dentro de una misma economía, le corresponderá necesariamente una única curva de transformación. Tan pronto como cambie la relación factorial que se da entre los dos sectores de una misma economía, cambiará también la curva de transformación.

Referencias

Andrew Mas-Colell, M. D. (1995). *Microeconomic theory*.

Appleyard, D. (1995). *Economía internacional*. IRWIN.

Carvajal, A., & Riascos, A. (2010). *Introducción a la teoría microecónomica*.

Dixit, A. (1980). *Theory of international trade: a dual general equilibrium approach o International trade theory and policy*.

Feenstra, R. (2003). *Advanced International Trade*. Princenton University Press.

Gandolfo, G. (1994). *International Economics*. Germany: Springer-Verlag.

Granville, W. A. (1992). *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa.

Heckscher, E. (1919). The Effect of Foreign Trade on the Distribution of Income. *Ekonomisk Tidskrift,* 497-512.

Jones, R. (2008). Heckscher-Ohlin Trade Flows.

Jones, R. (Dec., 1965). The Structure of Simple General Equilibrium Models. *The Journal of Political Economy*, 73(6), 557-572.

Krugman, P., & Maurice, O. (2011). *Economía Internacional*. Madrid: Pearson.

Llamas, I., & Ortiz, J. J. (2005). *Mathematica for economists*. México: Universidad Autónoma Metropolitana.

Noriega Ureña, F. (1994). *Teoría del desempleo, la distribución y la pobreza*. México: Planeta.

Noriega, F. (2001). *Macroeconomía para el desarrollo. Teoría de la inexistencia del mercado de trabajo*. Mc Graw Hill; Instituto de Investigaciones Económicas, UNAM.

Ohlin, B. (1933). *Interregional and International Trade*. Massachusetts: Harvard university Press.

Samuelson, P. (1941). Protection and Real Wages.

Samuelson, P. A. (1948). International trade and the equalisation of factor prices. *The economic Journal*, 58, 163-184.

Samuelson, P. A. (1948). International Trade and the Equalisation of Factor Prices. *The economic Journal*, 58, 163-184.

Samuelson, P. A. (June de 1949). International Factor-Price Equalisation Once Again. *The economic Journal*, 59(234), 181-197.

Stolper, W., & Samuelson, P. (1941). Protection and Real Wages. *The Review of Economic Studies*, 9(1 (Nov 1941)), 58-73.

Varian, H. (1992). *Análisis microeconómico*. Barcelona: ANTONI BOSCH.